# 공업수학2 기말고사

전공 :
학번 :
이름 :

- 총 문제는 6문제입니다.
- 풀이과정 없이 답만 제시되면 0점입니다.

**문제 1** (10점). 절대이상적분가능한 함수 $f$에 대하여 $f$의 푸리에 변환은

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi isx}\,dx$$

와 같이 정의된다. 이때 다음과 같이 정의된 함수 $f$에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$f$의 푸리에 변환이

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} \frac{\sin 2\pi s}{\pi s} & s \ne 0, \\ 2 & s = 0 \end{cases}$$

임을 보여라.

**문제 2** (10점). $g \in C^2(\mathbb{R})$이고 $h \in C^1(\mathbb{R})$이라 할 때 다음 초기값 문제를 만족하는 해를 구하라.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**문제 3** (총 15점). $0 < \delta < \pi$라 하고

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le \delta, \\ 0 & \text{if } \delta < |x| \le \pi \end{cases}$$

라 하자. 그리고 $f$가 $2\pi$ 주기를 갖는 함수라고 하자.

(a) $f$의 푸리에 계수를 구하라. [5점]

(b) (a)를 바탕으로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}, \quad (0 < \delta < \pi)$$

임을 보여라. [5점]

(c) Parseval의 항등식을 이용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

임을 보여라. [5점]

**문제 4** (총 20점). 함수 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$라 하자. 즉, 모든 음이 아닌 정수 $m$, $l$에 대하여

$$\max_x \left| x^m \frac{d^l}{dx^l} f(x) \right| \leq C$$

이 성립하는 상수 $C > 0$가 존재한다고 하자.

(a) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$일 때 $\widehat{f * g}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$임을 보여라. [5점]

(b) $f(x) = e^{-\pi x^2}$의 푸리에 변환이 $e^{-\pi s^2}$임을 보여라. [7점]

(c) (a)와 (b)를 이용하여 다음 열방정식의 초기값 문제를 풀어라. [8점]

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**문제 5** (20점). $B_1 \subset \mathbb{R}^3$이 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 구라고 하자. $g$가 $\partial B_1$위에서 연속인 함수라고 할 때 소문항을 따라 그린함수 풀이법으로 이 문제의 해를 찾아라.

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = 0 & \text{in } B_1, \\ u = g & \text{on } \partial B_1 \end{cases} \tag{1}$$

(a) $x \neq 0$에 대하여 $\tilde{x} = x/|x|^2$라 하자. 이 때 $y \in \partial B_1$이고 $x \neq 0$이면

$$|x|^2|y-\tilde{x}|^2 = |x-y|^2$$

임을 보여라. [5점]

(b) $x \neq 0$일 때 $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$라 하자. $x \in B_1$에 대하여

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi^x(y) = 0 & \text{in } B_1, \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x) & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

를 만족하는 $\phi^x$를 구하라. [5점]

(c) $x, y \in B_1$, $x \neq y$에 대하여 $G(x,y) = \Phi(x-y) - \phi^x(y)$라 하자. (1)의 해는

$$u(x) = -\int_{\partial B_1} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) g(y)\, d\sigma(y)$$

로 주어진다. 이때

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)$$

를 구하라. [10점]

**문제 6** (총 25점). 다음은 반 평면위에서의 정상 열방정식의 풀이를 구하는 과정을 기술한 것이다.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \\ u(x,0) = f(x) & \text{on } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

(a) 푸리에 변환을 이용하여 다음식이 성립함을 보여라. [10점]

$$e^{-2\pi|x|} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} e^{-\pi^2|x|^2/u} du$$

이를 이용하여 푸아송 커널이

$$P_y(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi isx} e^{-2\pi|x|y} dx$$

와 같이 정의될 때 $P_y(x)$를 구하라.
[Hint: $e^{-2\pi|x|}$의 푸리에 변환이 $\frac{1}{\pi(1+s^2)}$임을 사용하라. ]

(b) $P_y(x)$가 $\mathbb{R}^2_+$에서 조화함수임을 보여라. [8점]

(c) (a)를 이용하여 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$일 때 (2)의 해가

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{\pi(|x-z|^2 + y)} f(z)\, dz$$

임을 보여라. [7점]