$x^2+1=t$로 치환하면, $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고,

$$\int_0^2 \frac{10x}{x^2+1}dx = \int_1^5 \frac{5}{t}dx = \Big[5\ln|t|\Big]_1^5 = 5\ln 5$$

$$\int_3^6 \frac{10x}{x^2+1}dx = \int_{10}^{37} \frac{5}{t}dx = \Big[5\ln|t|\Big]_{10}^{37} = 5\ln 37 - 5\ln 10$$

입니다. 따라서 $\displaystyle\int_0^6 g(x)dx$의 최댓값은

$5\ln 5+\dfrac{7}{2}+5\ln 37-5\ln 10=\dfrac{7}{2}+5\ln\dfrac{37}{2}$ 입니다.

정답 : ④

73

$x<3$일 때에는 앞선 문제와 상황이 동일합니다. $x>3$일 때, 곡선이 아닌 직선을 취하면 문제의 조건을 만족합니다. 따라서 적분을 계산하면 (계산 생략) 최댓값은 $8+5\ln 5$이므로 $a=8$입니다.

정답 : 8

74

조건 (가)의 식에 $x=0$을 대입하면 $\ln\{4f(0)\}=0$에서 $f(0)=\dfrac{1}{4}$입니다. 그리고 조건 (가)의 식의 양변을 미분하면 $\dfrac{e^x}{f'(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$입니다. 그러면 $e^xf(x)=\{f'(x)\}^2$입니다. 여기에 조건 (나)의 좌변의 위끝과 아래끝인 $x=0$, $x=\ln 4$를 대입해 보겠습니다. 각각을 대입하면 $f(0)=\{f'(0)\}^2=\dfrac{1}{4}$에서

$f'(0)=\pm\dfrac{1}{2}\cdots$①이고, $4f(\ln 4)=\{f'(\ln 4)\}^2\cdots$②

입니다.

앞에서 얻은

$$e^xf(x)=\{f'(x)\}^2$$

의 양변을 미분하면

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=2f''(x)f'(x)$$

입니다. 여기에 $e^xf(x)=\{f'(x)\}^2$을 대입하면

$$\{f'(x)\}^2+e^xf'(x)=2f''(x)f'(x)$$

입니다. 문제의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이므로 양변을 $f'(x)$로 나누면

$$f'(x)+e^x=2f''(x)$$

입니다. 이때 (나) 조건인 $\displaystyle\int_0^{\ln 4} e^xf'(x)dx=\frac{31}{6}$를 활용하기 위해서 이 식의 양변에 e^x를 곱하면

$$e^xf'(x)+e^{2x}=2e^xf''(x)$$

입니다. 여기에서 양변을 0부터 $\ln 4$까지 정적분한다면 좌변의 $e^xf'(x)$는 (나) 조건에서 그 정적분 값이 주어져 있고, e^{2x}의 정적분은 쉽게 계산할 수 있으며, 우변은 부분적분을 통해 계산할 수 있습니다.

이제 양변을 0부터 $\ln 4$까지 적분하면 다음과 같습니다.

$$(\text{좌변})=\int_0^{\ln 4}\left\{e^xf'(x)+e^{2x}\right\}dx = \frac{31}{6}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 4}=\frac{31}{6}+\frac{15}{2}=\frac{38}{3}$$

$$(\text{우변})=\int_0^{\ln 4}2e^xf''(x)dx = 2\Big[e^xf'(x)\Big]_0^{\ln 4}-2\int_0^{\ln 4}e^xf'(x)dx = 8f'(\ln 4)-2f'(0)-\frac{31}{3}$$

따라서 $8f'(\ln 4)=23+2f'(0)$입니다. ①에서 $f'(0)=\pm\dfrac{1}{2}$이므로 각각의 경우를 살펴보면 다음과 같습니다.

(1) $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

$8f'(\ln 4)=23-1=22$이므로 $f'(\ln 4)=\dfrac{11}{4}$ 입니다. 그런데 이 경우 함수 $f'(x)$가 연속이므로[7]

[7] 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하므로 함수 $f'(x)$는 미분가능합니다. 미분가능하면 연속이므로 함수 $f'(x)$는 연속

사이값 정리에 의해 $f'(x)=0$을 만족하는 x가 0과 $\ln 4$ 사이에 존재합니다. 이는 문제의 조건인 '$x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \neq 0$'에 위배됩니다.

(2) $f'(0)=\frac{1}{2}$

$8f'(\ln 4)=23+1=24$이므로 $f'(\ln 4)=3$ 입니다.

이제 $\int_0^{\ln 4} e^x f(x)dx$를 계산하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 4} e^x f(x)dx &= \left[e^x f(x)\right]_0^{\ln 4} - \int_0^{\ln 4} e^x f'(x)dx \\ &= 4f(\ln 4) - f(0) - \frac{31}{6} \\ &= 4f(\ln 4) - \frac{1}{4} - \frac{31}{6} \\ &= 4f(\ln 4) - \frac{65}{12}\end{aligned}$$

②에서 $4f(\ln 4)=\{f'(\ln 4)\}^2$이므로 $4f(\ln 4)=9$ 입니다. 따라서 $\int_0^{\ln 4} e^x f(x)dx = 9-\frac{65}{12}=\frac{43}{12}$이고, $p+q=12+43=55$입니다.

정답 : 55

75

(나)를 $\frac{\ln f(x)}{f(x)} \times f'(x) = \frac{x}{e^x} \cdots$ ①로 정리할 수 있습니다.

풀이 1) $f(x)=t$로 치환하기

①의 좌변은 $f(x)$에 대한 식에 $f'(x)$가 곱해진 식이므로 치환적분을 활용할 수 있습니다. $f(x)=t$로 치환하면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\left\{\frac{\ln f(x)}{f(x)} \times f'(x)\right\}dx = \int \frac{\ln t}{t}dt$$

입니다.

입니다. 여기서 다시 $\ln t = y$로 치환하면 $\frac{1}{t}=\frac{dy}{dt}$이므로

$$\int \frac{\ln t}{t}dt = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

입니다. $y=\ln t=\ln f(x)$이므로 ①의 좌변을 적분하면 $\frac{1}{2}\{\ln f(x)\}^2+C_1$이 됩니다. ①의 우변을 적분하면 부분적분법에 의하여 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{e^x}dx &= \int xe^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - \int(-e^{-x})dx \\ &= -(x+1)e^{-x} + C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{1}{2}\{\ln f(x)\}^2 = -(x+1)e^{-x} + C \text{ (단, } C = C_2 - C_1\text{)}$$

입니다. 양변에 $x=0$을 대입하면 $C=\frac{3}{2}$를 얻습니다.

즉 $\ln f(x) = \pm\sqrt{-2(x+1)e^{-x}+3}$이고 $f(x)=e^{\pm\sqrt{-2(x+1)e^{-x}+3}}$입니다. 따라서 $f(-1)=e^{\sqrt{3}}$ 입니다.

풀이 2) $\{\ln f(x)\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 임을 이용하기

$\{\ln f(x)\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$이므로 ①의 좌변은 $\ln f(x) \times \{\ln f(x)\}'$와 같습니다. 그러므로 $\ln f(x)=u$로 치환하면 $\{\ln f(x)\}'=\frac{du}{dx}$이므로 좌변을 적분하면

$$\int \ln f(x) \times \{\ln f(x)\}' dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

입니다. 이후의 풀이는 '풀이 1'과 같습니다.

정답 : 3

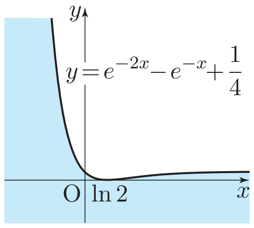
76

$g(x)=e^{-2x}-e^{-x}+\frac{1}{4}$이라 하겠습니다. (가) 조건에서 $f(x)\le g(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=g(x)$의 아래 영역에 있습니다.

$g(x)=e^{-2x}-e^{-x}+\frac{1}{4}$를 미분하면

$g'(x)=-2e^{-2x}+e^{-x}=-e^{-x}(2e^{-x}-1)$입니다.

따라서 곡선 $y=g(x)$는 $x=\ln 2$에서 극솟값 0을 갖습니다. 이를 바탕으로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 존재할 수 있는 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같습니다.



이제 (나) 조건을 해석하겠습니다. (나) 조건에 따르면 $f(x)f'(x)\le 0$가 성립하는데, $f(x)=t$라 하면

$$\begin{aligned}\int f(x)f'(x)dx=\int t\,dt&=\frac{1}{2}t^2+C\\&=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2+C\end{aligned}$$

(단, C는 적분상수.)

이므로 함수 $f(x)f'(x)$는 함수 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$의 도함수입니다. $h(x)=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$라 하면 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\ge 0$이므로 $h(x)\ge 0$이고, $h'(x)\le 0$이므로 함수 $h(x)$는 적당한 구간에서 감소함수 또는 적당한 구간에서 상수함수입니다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\ge 0$이므로, 모든 실수 x에 대하여 항상 $f(x)\le 0$ 이거나 항상 $f(x)\ge 0$입니다.[8] 다시 말해, $f(x)$의 부호는 바뀔 수 없습니다. 문제에서 구하는 것은 $\int_{-\ln 4}^{\ln 4}f(x)dx$의 최댓값이므로 $f(x)\ge 0$인 상황을 택해야 합니다. $f(x)\ge 0$이면, $0\le f(\ln 2)\le g(\ln 2)$인데 $g(\ln 2)=0$이므로 $f(\ln 2)=0$을 얻습니다.

한편 $f(\ln 2)=0$이므로 $h(\ln 2)=0$인데, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\ge 0$이므로 열린 구간 $(\ln 2,\ \infty)$에서 $h(x)$가 감소함수일 수는 없습니다. 따라서 $h(x)$는 열린 구간 $(\ln 2,\ \infty)$에서 상수함수입니다. 즉 $x>\ln 2$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=0$입니다. 따라서 $x>\ln 2$에서 $f(x)=0$이고, $\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)dx=0$입니다.

한편 열린 구간 $(-\infty,\ \ln 2)$에서 $f(x)\le g(x)$이므로 $\int_{-\ln 4}^{\ln 2}f(x)dx\le\int_{-\ln 4}^{\ln 2}g(x)dx$이고, $f(x)=g(x)$여도 주어진 조건에 위배되지 않으므로 부등식의 등호 또한 성립합니다.

따라서 $\int_{-\ln 4}^{\ln 4}f(x)dx$를 계산하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int_{-\ln 4}^{\ln 4}f(x)dx&=\int_{-\ln 4}^{\ln 2}f(x)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)dx\\&=\int_{-\ln 4}^{\ln 2}f(x)dx+0\\&\le\int_{-\ln 4}^{\ln 2}g(x)dx\\&=\int_{-\ln 4}^{\ln 2}\left(e^{-2x}-e^{-x}+\frac{1}{4}\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+e^{-x}+\frac{1}{4}x\right]_{-\ln 4}^{\ln 2}\\&=\frac{35}{8}+\frac{3}{4}\ln 2\end{aligned}$$

$\int_{-\ln 4}^{\ln 4}f(x)dx$의 최댓값은 $\frac{35}{8}+\frac{3}{4}\ln 2$입니다.

정답 : ③

[8] 만약 $x=a$에서 $f(x)$의 부호가 바뀌면 함수 $h(x)$가 증가하는 구간이 생기므로 $h'(x)\le 0$ 조건에 위배됩니다.

77

(가)를 주어진 상태 그대로 미분할 경우 식이 복잡하여 해석하기 쉽지 않습니다. 따라서 좀 더 간단한 해석을 위하여 $\frac{f(x)}{x} = g(x)$라 하면 $\frac{f(-x)}{x} = -g(-x)$입니다. 이를 이용하여 (가)를 다시 쓰면 다음과 같습니다.

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(\frac{f(-x)}{x}\right)'$$

$$(g(x))' = (-g(-x))'$$

$$g'(x) = g'(-x)$$

양변을 부정적분하면 $g(x) = -g(-x) + C$이고, 이 식을 $f(x)$에 대한 식으로 바꾸기 위하여 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$를 다시 대입하면 $f(x) = f(-x) + Cx$를 얻습니다.

이제 (나) 조건을 해석하겠습니다. 먼저 절댓값을 풀기 위해서는 $f(x)$와 x의 대소관계를 파악해야 합니다. $f(x)$에 대하여 알아보면, 문제의 조건에서 $f(x)$는 감소함수이고 $f(0) = 0$이므로 $x < 0$이면 $f(x) > 0$이고, $x > 0$이면 $f(x) < 0$입니다. 따라서 $x < 0$일 때 $f(x) > x$이고, $x > 0$일 때 $f(x) < x$이므로, $x = 0$을 기준으로 $f(x)$와 x의 대소관계가 달라집니다. 이를 이용하여 절댓값을 풀고 정적분을 계산하면

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2} |f(x) - x|dx \\ &= \int_{-2}^{0} |f(x) - x|dx + \int_{0}^{2} |f(x) - x|dx \\ &= \int_{-2}^{0} \{f(x) - x\}\,dx + \int_{0}^{2} \{x - f(x)\}\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx + 4 = 20 \cdots ①\end{aligned}$$

라 할 수 있습니다.

이제 (가) 조건을 이용하여 $\int_{-2}^{0} f(x)dx$를 계산하겠습니다. $\int_{-2}^{0} f(x)dx$에 $f(x) = f(-x) + Cx$를 대입하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} f(x)dx &= \int_{-2}^{0} \{f(-x) + Cx\} \\ &= \int_{-2}^{0} f(-x)dx + \int_{-2}^{0} Cxdx \\ &= \int_{-2}^{0} f(-x)dx - 2C\end{aligned}$$

$\int_{-2}^{0} f(-x)dx$에서 $-x = t$로 치환하면 $-1 = \frac{dt}{dx}$이고, $\int_{-2}^{0} f(-x)dx = -\int_{2}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{2} f(t)dt$입니다.

따라서 $\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{2} f(t)dt - 2C$이고, 이를 ①에 대입하면 $-2C + 4 = 20$에서 $C = -8$입니다. 따라서 $f(x) = f(-x) - 8x$입니다. $f(-2)$를 구하기 위해 양변에 $x = 2$를 대입하면 $f(2) = f(-2) - 16$인데, 문제의 조건에서 $f(2) = -10$이므로 $f(-2) = 6$입니다.

정답 : 6

78

점 P와 점 Q의 x좌표를 각각 s, t $(s < t)$라 하겠습니다. $y = e^{kx}$의 도함수와 이계도함수는 각각 $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$입니다. 모든 실수 x에 대하여 $y'' > 0$이므로 y'은 증가함수입니다. 따라서 l의 기울기 ke^{ks}와 m의 기울기 ke^{kt}에 대하여 $ke^{ks} < ke^{kt}$가 성립합니다.

그러면 's와 t의 차'가 커지면 'l과 m이 이루는 예각의 크기'도 커지고, 's와 t의 차'가 작아지면 'l과 m이 이루는 예각의 크기'도 작아집니다. 반대 또한 성립합니다. 따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 l과 m이 이루는 예각의 크기가 $45°$일 때 $t - s \geq \frac{1}{2}$이면 됩니다.

두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 각각 α, β라 하고, 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\tan\alpha = ke^{ks}$, $\tan\beta = ke^{kt}$이고 $\tan\alpha < \tan\beta$이므로 $\theta = \beta - \alpha$입니다. 따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{ke^{kt} - ke^{ks}}{1 + k^2e^{k(s+t)}}$입니다.

이제 $\theta=\frac{\pi}{4}$라 하면 $\frac{ke^{kt}-ke^{ks}}{1+k^2e^{k(s+t)}}=1$이므로

$$k^2e^{k(s+t)}-ke^{kt}+ke^{ks}+1=0$$

입니다. 즉 $e^{ks}\left(k^2e^{kt}+k\right)=ke^{kt}-1$이고, 양변을 s에 대하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$s=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{ke^{kt}-1}{k^2e^{kt}+k}\right)$$

따라서 $t-s=t-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{ke^{kt}-1}{k^2e^{kt}+k}\right)\cdots$①입니다. 이제 $t-s\geq\frac{1}{2}$이 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 찾으면 됩니다.

$f(t)=t-s$라 하면, 로그의 진수조건에 의해 $ke^{kt}-1>0$이므로 $t>-\frac{\ln k}{k}$입니다. 한편 함수 $f(t)$의 도함수 $f'(t)$를 구하면 다음과 같습니다.

$$f'(t)=1-\frac{1}{k}\times\frac{\frac{2k^2e^{kt}}{\left(ke^{kt}+1\right)^2}}{\frac{ke^{kt}-1}{ke^{kt}+1}}=\frac{k^2e^{2kt}-2ke^{kt}-1}{k^2e^{2kt}-1}$$

이제 $f'(t)$의 부호 변화를 통해 함수 $f(t)$를 분석하도록 하겠습니다. 먼저 $f'(t)=0$을 만족시키는 실수 t를 찾겠습니다. 위 식의 분자는 ke^{kt}에 대한 이차식이므로 $f'(t)=0$인 t는 근의 공식에 의해 $ke^{kt}=1\pm\sqrt{2}$를 만족시킵니다. $ke^{kt}>0$이므로 $ke^{kt}=1+\sqrt{2}$일 때에만, 즉 $t=\frac{1}{k}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{k}$일 때에만 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고 함수 $f(t)$가 극솟값(인 동시에 최솟값)을 갖습니다. 따라서 $ke^{kt}=1+\sqrt{2}$일 때 $t-s$가 최솟값을 갖습니다.

t	$-\frac{\ln k}{k}$	$\cdots$	$\frac{1}{k}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{k}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	최소	$\nearrow$

이제 $ke^{kt}=1+\sqrt{2}$를 ①에 대입하여 $f\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{k}\right)$의 값, 즉 $t-s$의 최솟값을 계산하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}t-s&\geq t-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k}\times\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)\\&=t+\frac{1}{k}\ln\left(k\times\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\\&=\frac{kt}{k}+\frac{1}{k}\ln\left\{k(1+\sqrt{2})\right\}\\&=\frac{1}{k}\ln e^{kt}+\frac{1}{k}\ln\left\{k(1+\sqrt{2})\right\}\\&=\frac{1}{k}\ln\left\{ke^{kt}(1+\sqrt{2})\right\}=\frac{1}{k}\ln(1+\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

즉 $t-s$의 최솟값은 $\frac{1}{k}\ln(1+\sqrt{2})^2$이고, 문제의 조건에 의해 이 값은 $\frac{1}{2}$보다 크거나 같습니다. 따라서 $\frac{1}{k}\ln(1+\sqrt{2})^2\geq\frac{1}{2}$에서 $k\leq\ln(1+\sqrt{2})^4$입니다. 이때 k의 최댓값 M에 대하여 $M=\ln(1+\sqrt{2})^4$이고, $e^M=(1+\sqrt{2})^4=17+12\sqrt{2}$에서 $a+b=17+12=29$입니다.

정답 : 29

79

$f(x)$는 연속함수이므로, (가)에서 $\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=1$임을 알 수 있습니다. (나)의 양변에 $\lim_{x\to0}$를 취하면

$$\lim_{x\to0}\{f(x)f(-x)\}=\{f(0)\}^2=1^2=1$$

입니다. 따라서 $a=1$입니다.

ㄱ. $g(a)=g(1)$입니다. $g(x)$의 역함수는 $f(x)$이므로 $f(0)=1$에서 $g(1)=0$입니다. (참)

ㄴ. x가 음수일 때, $f(x)f(-x)=1$에서 $-x$는 양수이므로 $f(x)=\frac{1}{f(-x)}=\frac{1}{e^{\sqrt{-x}}}=e^{-\sqrt{-x}}$입니다. 따라서 $x<0$일 때 $f(x)=e^{-\sqrt{-x}}$입니다.

즉 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\sqrt{-x}} & (x<0) \\ e^{\sqrt{x}} & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 $x=0$에서의 미분가능성을 따져 보면 됩니다. $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ 입니다. 우극한을 먼저 살펴보면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{e^{\sqrt{h}}-1}{\sqrt{h}}\times\frac{1}{\sqrt{h}}\right\}=\infty$$

이므로, 우극한은 발산합니다. 마찬가지 방법으로 좌극한이 양의 무한대로 발산함을 알 수 있습니다.

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않습니다. (거짓)

ㄷ. $x\geq 0$에서 $y=e^{\sqrt{x}}$를 x에 대하여 정리하면 $x=(\ln y)^2$ $(y\geq 1)$입니다. $x<0$에서 $y=e^{-\sqrt{-x}}$를 x에 대하여 정리하면 $x=-(\ln y)^2$ $(0<y<1)$ 입니다. 각각에서 x와 y를 서로 바꾸면 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 얻습니다. 즉

$$g(x)=\begin{cases} -(\ln x)^2 & (0<x<1) \\ (\ln x)^2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

입니다. 이때 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 양수 x의 집합에서 미분가능하므로, $x=1$에서의 미분가능성만 조사하면 됩니다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\{\ln(1+h)\}^2}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-\{\ln(1+h)\}^2}{h}=0$$

이므로 $g'(0)=0$입니다. 따라서 함수 $g(x)$는 양수 전체의 집합에서 미분가능합니다. (참)

정답 : ③

80

(가) 조건은 해석할 여지가 많지 않으므로, (나) 조건을 먼저 해석하겠습니다.

풀이 1) 양변을 미분하여 해석하기

$g(x)=\int f(x)\sin x dx$, $h(x)=\int f(x)\cos x dx$라 하면 (나) 조건은 $g(x)-g(-x)=h(x)-h(-x)$와 동치입니다. 이 식의 양변을 미분하면

$$g'(x)-\{-g'(-x)\}=h'(x)-\{-h'(-x)\}$$

이고, $g'(x)=f(x)\sin x$, $h'(x)=f(x)\cos x$를 대입하면

$$f(x)\sin x+f(-x)\sin(-x)=f(x)\cos x+f(-x)\cos(-x)$$

입니다. 이때 모든 실수 x에 대하여 $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$이므로

$$f(x)\sin x-f(-x)\sin x=f(x)\cos x+f(-x)\cos x$$

입니다. 각 변을 $\sin x$, $\cos x$로 각각 묶으면

$$\sin x\{f(x)-f(-x)\}=\cos x\{f(x)+f(-x)\}$$

입니다. 이 식의 우변에 (가) 조건 $f(x)+f(-x)=x\sin x$를 대입하면

$$\sin x\{f(x)-f(-x)\}=x\sin x\cos x$$

입니다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(-x)=x\cos x\cdots$①입니다.

(가) 조건과 ①을 연립하면 $f(x)=\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)$

입니다. 이제 부분적분을 이용하여 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$의 값을 구하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2}(\sin x+\cos x)\,dx\\&=\left[\frac{x}{2}(-\cos x+\sin x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\\&\quad-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x)\,dx\end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} - \left\{ \frac{-\pi}{4} (-0-1) \right\}$$

$$- \left[\frac{1}{2} (-\sin x - \cos x) \, dx \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} (+1-0) \right\}$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} - \pi}{4}$$

풀이 2) 함수의 대칭성 이용하기

(나) 조건의 우변의 식을 좌변으로 이항하고 정리하면 다음과 같습니다.

$$\int_{-x}^{x} f(t) \sin t dt - \int_{-x}^{x} f(t) \cos t dt = 0$$

$$\int_{-x}^{x} f(t) \{ \sin t - \cos t \} \, dt = 0$$

이때 $i(x) = f(x) \{ \sin x - \cos x \}$라 하면 함수 $i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로[9] 모든 실수 x에 대하여 $i(-x) = -i(x)$가 성립합니다. 이후의 풀이는 '풀이 1'과 같습니다.

정답 : ②

81

(가) 조건만으로는 어떠한 정보도 얻을 수 없으므로, (나) 조건을 먼저 분석하겠습니다.

(나) 조건에 주어진 식의 양변에 $x = 0$을 대입하면

$$0 = g(0) + \ln |g(2)| + a \cdots ①$$

입니다. 함수 $g(x)$에 대한 정보 없이는 a의 값을 구할 수 없으므로, 먼저 $g(x)$를 구해야 합니다.

주어진 식의 양변을 미분하면 다음과 같습니다.

$$\frac{x^3 + x^2}{f(x)} = g'(x) + \frac{g'(x+2)}{g(x+2)} \quad \cdots \quad ②$$

[9] $\int i(x)dx = I(x)$라 하면 $I(x) - I(-x) = 0$이고, 양변을 미분하면 $i(x) + i(-x) = 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $i(-x) = -i(x)$가 성립합니다.

이 식은 항등식이지만 유리식입니다. 다항식으로 변형하기 위해 양변에 $f(x)g(x+2)$를 곱하면 다음과 같습니다.

$$(x^3+x^2)g(x+2) = f(x)g'(x)g(x+2) + f(x)g'(x+2) \cdots ③$$

이제 (가) 조건을 이용해 $f(x)$와 $g(x)$에 대한 정보를 알아보겠습니다.

1) $f(x)$와 $g(x)$가 상수함수

③의 양변의 차수가 다르므로 모순입니다.

2) $f(x)$와 $g(x)$가 일차함수

③의 양변의 차수가 다르므로 모순입니다.

3) $f(x)$와 $g(x)$가 이차함수

③의 양변의 차수가 같습니다.

4) $f(x)$와 $g(x)$가 삼차 이상의 다항함수

③의 양변의 차수가 다르므로 모순입니다.

이상으로 살펴본 바에 따르면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 이차함수입니다. 이를 토대로 다시 ③을 살펴보겠습니다. ③에서 $x^3 + x^2$은 정해진 식이고, $f(x)$, $g(x+2)$, $g'(x)$, $g'(x+2)$는 아직 정해지지 않은 식이므로, $x^3 + x^2 = (\ )$ 꼴로 식을 정리해야 항등식을 풀이하기 편리합니다. 따라서 ③의 양변을 $g(x+2)$로 나누면 다음과 같습니다.

$$x^3 + x^2 = f(x)g'(x) + \frac{f(x)g'(x+2)}{g(x+2)} \quad \cdots \quad ④$$

④에서 좌변은 다항식이고, $f(x)g'(x)$도 다항식이므로 $\frac{f(x)g'(x+2)}{g(x+2)}$는 다항식입니다. 그러면 유리식에서 분모의 모든 인수는 분자에도 포함되어야 합니다. 이때 $f(x)$와 $g(x+2)$는 이차식이고, $g'(x+2)$는 일차식이므로, 주어진 유리식이 다항식이 되는 경우는 다음의 두 경우 중 하나입니다.

(ㄱ) $g(x+2)$와 $f(x)$가 공통인수를 두 개 갖는 경우

이러한 경우 $f(x)$와 $g(x+2)$는 실수배 관계이므로 $f(x) = kg(x+2)$ (단, $k \neq 0$)라 할 수 있습니다.