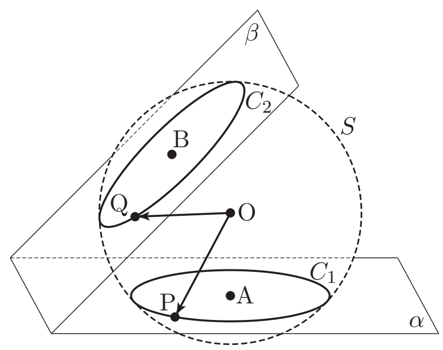
Special 3.4 (준)기본벡터 사이의 최대 · 최소 2 : 비교적 어려운 경우

콘벡터와 콘벡터, 돔벡터와 돔벡터, 돔벡터와 콘벡터의 '내적' 또는 '합의 크기'의 최대 · 최소는 고정벡터가 없고, 두 벡터의 종점이 모두 움직이고 있기 때문에 앞서 다룬 것보다 더 복잡합니다. 그 중 두 벡터의 시점이 구 S의 중심으로 일치하고, 두 벡터의 종점이 각각 S 위의 점인 상황은 (여전히 어렵지만) 그나마 다루기가 수월한 편입니다. 수능 고난도 문제에 자주 등장한 주제이므로 함께 다루어봅시다.

S3.4.1 콘벡터와 콘벡터



그림과 같이 두 평면 α, β가 중심이 O이고 반지름이 r인 구 S와 만날 때, 구 S가 두 평면 α, β와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하겠습니다. 이때 C_1 위의 점 P와 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 각각 콘벡터입니다. 이제 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최대 · 최소를 통하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 '내적'과 '합의 크기'의 최대 · 최소를 구할 것입니다.[111)]

111) 단, α와 β가 평행한 경우는 S 3.2)에서와 같이 콘벡터를 높이벡터와 원벡터로 쪼개면 쉽게 최대 · 최소를 구할 수 있으므로 다루지 않습니다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$로 최대 · 최소를 구하는 이유, 그리고 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 범위

삼각형 POQ를 생각했을 때, B 3.3)에 따르면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 값은 다음과 같습니다.

$$\overline{\mathrm{PQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})^2} = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}$$
$$= \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos\theta}$$

이 식에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 이루는 각의 크기인 θ $(0 \le \theta \le \pi)$가 증가하면 $\cos\theta$가 감소하고 $-2r^2\cos\theta$는 증가하므로 $\sqrt{2r^2 - 2r^2\cos\theta}$는 증가합니다. 따라서 θ가 증가하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 증가하고, θ가 감소하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 감소하므로, θ의 최대 · 최소는 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최대 · 최소로 대신하여 생각할 수 있습니다.

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$는 각각 내적의 정의, '크기의 제곱'에 의해 다음과 같습니다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta = r^2\cos\theta$$

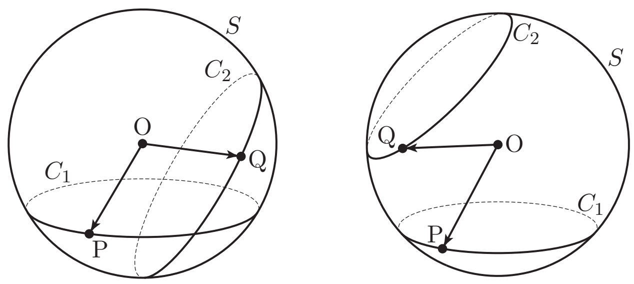
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2} = \sqrt{2r^2 + 2r^2\cos\theta}$$

그러므로 θ가 최소이면 '내적'과 '합의 크기'는 모두 최대이고, θ가 최대이면 '내적'과 '합의 크기'는 모두 최소입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소인 상황과 최대인 상황을 찾으면 그 상황은 각각 '내적'과 '합의 크기'가 최대인 상황과 최소인 상황이 되므로, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최대 · 최소를 통하여 '내적'과 '합의 크기'의 최대 · 최소를 구할 수 있습니다.

만약 두 점 P, Q가 아무런 제약 없이 구 위를 움직인다면, $\overline{\mathrm{PQ}}$는 한 구 위의 두 점 사이의 거리입니다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 범위는 $0 \le \overline{\mathrm{PQ}} \le 2r$입니다. $\overline{\mathrm{PQ}} = 0$일 때는 두 점이 동일한 점이므로 $\theta = 0$이고, $\overline{\mathrm{PQ}} = 2r$일 때는 지름이므로 $\theta = \pi$입니다. 그런데 두 점 P, Q에 제약이 있다면, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값과 최댓값이 각각 0, $2r$가 아닐 수도 있으므로 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 범위는 다음과 같습니다.

$$0 \le m \le \overline{\mathrm{PQ}} \le M \le 2r$$

이제 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 범위를 이용하여 '내적'과 '합의 크기'의 최대 · 최소를 구해보도록 하겠습니다.

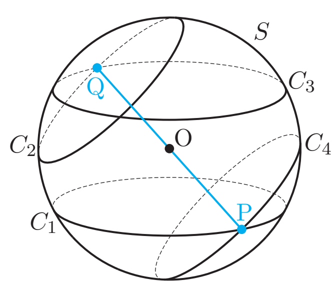


원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 할 때, C_1과 C_2가 만나거나 만나지 않는 두 가지의 경우가 있습니다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 최대('내적', '합의 크기'가 최소)

α와 평행하고 구의 중심과의 거리가 $\overline{\mathrm{OA}}$인 평면을 α'라 하고, β와 평행하고 구의 중심과의 거리가 $\overline{\mathrm{OB}}$인 평면을 β'라 하고, 구 S가 두 평면 α', β'과 만나서 생기는 원을 각각 C_3, C_4라 할 때 다음과 같이 두 가지의 경우로 분류할 수 있습니다.

① C_2가 C_3과 만날 때[112)]



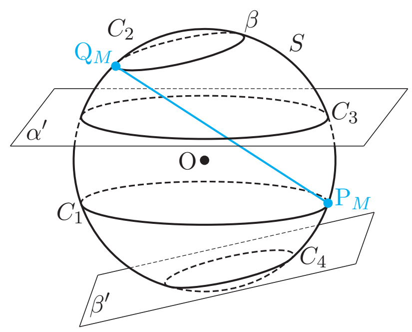
(1) C_1과 C_3은 O에 대하여 대칭
(2) C_2와 C_4는 O에 대하여 대칭

그림과 같이 C_2와 C_3의 교점 중 하나를 Q로 잡고, C_1과 C_4의 교점 중 직선 OQ 위에 있는 점을 P로 잡으면 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 구의 지름이 됩니다. 따라서 $M = 2r$입니다.

112) 이때 C_1도 C_4와 만납니다.

113) 이때 C_1도 C_4와 만나지 않습니다.

② C_2가 C_3과 만나지 않을 때 [113)]

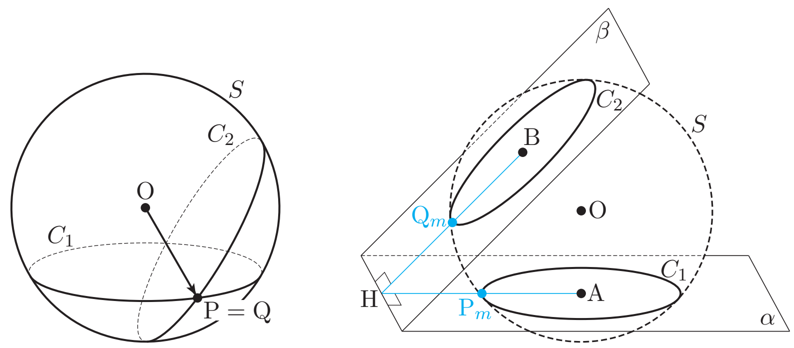


(1) C_1과 C_3은 O에 대하여 대칭
(2) C_2와 C_4는 O에 대하여 대칭

114) 증명은 부록에 수록하였습니다.

그림과 같이 C_1 위의 점 중 β'과의 거리가 가장 작은 점을 P_M이라 하고, C_2 위의 점 중 α'과의 거리가 가장 작은 점을 Q_M이라 할 때, $M = \overline{\mathrm{P}_M\mathrm{Q}_M}$입니다.[114)]

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소(‘내적’, ‘합의 크기’가 최대)



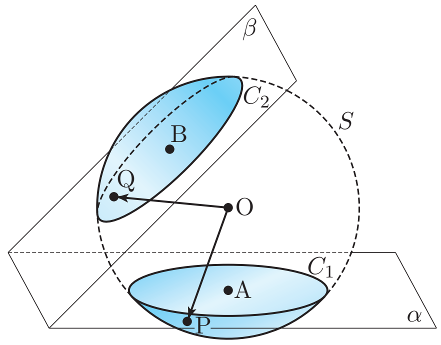
(a) C_1과 C_2가 만나는 경우 (b) C_1과 C_2가 만나지 않는 경우

(a)와 같이 C_1과 C_2가 만나는 경우, P와 Q가 같은 점이 될 수 있습니다. 그러면 $\overline{\mathrm{PQ}} = 0$이므로 $m = 0$입니다.

(b)와 같이 C_1과 C_2가 만나지 않는 경우, P와 Q가 같은 점이 될 수 없습니다. 이러한 상황에서는 두 평면 α, β의 교선 l에 대하여 O에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{AH}}$와 원 C_1이 만나는 점을 P_m, $\overline{\mathrm{BH}}$와 원 C_2가 만나는 점을 Q_m이라 할 때, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_m$이고 $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_m$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소입니다. 즉 $m = \overline{\mathrm{P}_m\mathrm{Q}_m}$입니다.[115)]

115) 증명은 부록에 수록하였습니다.

S3.4.2 돔벡터와 돔벡터



그림과 같이 두 평면 α, β가 중심이 O이고 반지름이 r인 구 S와 만날 때, 구 S가 두 평면 α, β와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하겠습니다. 이때 C_1을 밑면으로 하는 돔 위를 움직이는 점 P와 C_2를 밑면으로 하는 돔 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$는 각각 돔벡터입니다. 이제 $\overline{PQ}$의 최대 · 최소를 통하여 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$의 '내적'과 '합의 크기'의 최대 · 최소를 구할 것입니다.[116)]

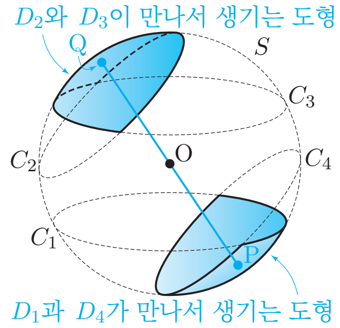
116) $\overline{PQ}$로 최대 · 최소를 구하는 이유는 콘벡터에서와 동일하므로 생략합니다.

$\overline{PQ}$가 최대(내적, 합의 크기가 최소)

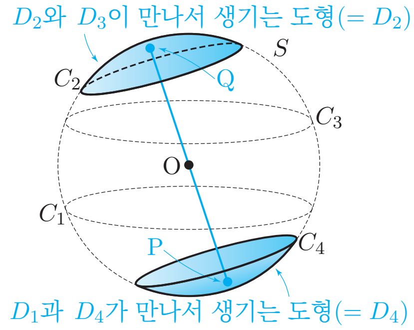
α와 평행하고 구의 중심과의 거리가 $\overline{OA}$인 평면을 α'라 하고, β와 평행하고 구의 중심과의 거리가 $\overline{OB}$인 평면을 β'라 하고, 구 S가 두 평면 α', β'과 만나서 생기는 원을 각각 C_3, C_4라 하겠습니다. 원 C_1 ~ C_4를 밑면으로 하는 돔을 각각 D_1 ~ D_4라 할 때, P, Q, P$'$, Q$'$은 각각 D_1, D_2, D_3, D_4 위를 움직입니다. 이때 다음과 같이 두 가지의 경우로 분류할 수 있습니다.

① D_2가 D_3과 만날 때[117)]

117) 이때 D_1도 D_4와 만납니다.



(a) D_2와 D_3이 일부만 겹치는 경우

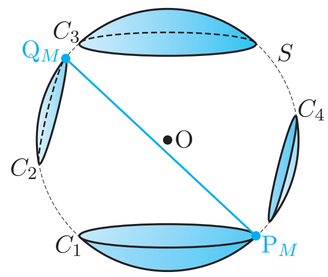


(b) D_2가 D_3에 완전히 포함되는 경우

그림과 같이 D_2와 D_3이 만나는 점 중 하나를 Q로 잡고, D_1과 D_4의 교점 중 직선 OQ와 만나는 점을 P로 잡으면 $\overline{PQ}$가 구의 지름이 됩니다. 따라서 $M = 2r$입니다.

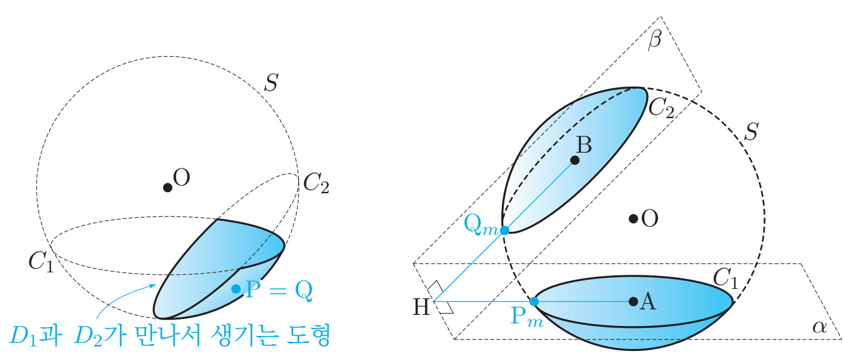
118) 이때 D_1도 D_4와 만나지 않습니다.

② D_2가 D_3과 만나지 않을 때[118)]



그림과 같이 D_1 위의 점 중 β'과의 거리가 가장 작은 점을 P_M이라 하고, D_2 위의 점 중 α'과의 거리가 가장 작은 점을 Q_M이라 할 때, $M=\overline{\mathrm{P}_M\mathrm{Q}_M}$입니다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소(내적, 합의 크기가 최대)



(a) D_1과 D_2가 만나는 경우 (b) D_1과 D_2가 만나지 않는 경우

(a)와 같이 D_1과 D_2가 만나는 경우, P와 Q가 같은 점이 될 수 있습니다. 그러면 $\overline{\mathrm{PQ}}=0$이므로 $m=0$입니다.

(b)와 같이 D_1과 D_2가 만나지 않는 경우, P와 Q가 같은 점이 될 수 없습니다. 이러한 상황에서는 두 평면 α, β의 교선 l에 대하여 O에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{AH}}$와 원 C_1이 만나는 점을 P_m, $\overline{\mathrm{BH}}$와 원 C_2가 만나는 점을 Q_m이라 할 때, $\mathrm{P}=\mathrm{P}_m$이고 $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}_m$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 최소입니다. 즉 $m=\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{Q}_m}$입니다.[119)]

119) 증명은 부록에 수록하였습니다.

돔 대신 '돔의 밑면'으로 생각하기 : 돔벡터 대신 콘벡터

돔의 위치관계는 '돔의 밑면'의 위치관계로 바꾸어 생각할 수 있습니다. 밑면끼리 만나지 않으면 두 돔은 만나지 않고, 밑면끼리 한 점에서 만나면 두 돔은 한 점에서만 만나고, 밑면끼리 두 점에서 만나면 두 돔은 공통영역이 존재합니다.

이러한 위치관계를 고려했을 때, '돔벡터와 돔벡터'는 돔 전체의 위치관계를 생각할 필요 없이 밑면 사이의 위치관계만 따지면 됩니다. 따라서 복잡하게 돔 전체를 그릴 필요 없이 밑면만 그리면 됩니다. 그러면 결국 S 3.4.1) '콘벡터와 콘벡터'에서와 동일한 방법임을 알 수 있습니다.[120)]

120) '돔벡터의 시점'을 시점으로 하고, 종점이 '돔벡터의 밑면'을 움직이는 벡터는 콘벡터이기 때문입니다.

S 3.4.3 돔벡터와 콘벡터

돔벡터 $\vec{d}$와 콘벡터 $\vec{c}$에 대하여 $|\vec{d}+\vec{c}|$와 $\vec{d}\cdot\vec{c}$의 최대 · 최소를 알아봅시다.

'돔벡터와 돔벡터'에서 돔벡터 대신 콘벡터로 생각했듯이, '돔벡터와 콘벡터'는 '콘벡터와 콘벡터'로 바꾸어 생각하면 편리합니다. '$\vec{d}$의 시점'을 시점으로 하고, 종점이 '$\vec{d}$가 나타내는 돔의 밑면'을 움직이는 콘벡터를 $\vec{c_1}$이라 하면 '$|\vec{d}+\vec{c}|$와 $\vec{d}\cdot\vec{c}$의 최대 · 최소'는 '$|\vec{c_1}+\vec{c}|$와 $\vec{c_1}\cdot\vec{c}$의 최대 · 최소'와 동일하므로 S 3.4.1)을 이용하여 최대 · 최소를 구하면 됩니다.