

교육용 수학적 표현

조판의 관점

Nova de Hi

2023-06-03, 공주대학교 문서작성워크숍

KTUG

- 중·고등학교 교육용 문서의 in-line math를 《큰 부호》로 식자하는 조판 관행에 대한 고찰

- 중·고등학교 교육용 문서의 in-line math를 《큰 부호》로 식자하는 조판 관행에 대한 고찰
- 이를 구현하는 패키지의 작성

문제의 소재

A Case

이제 합격 확률을 계산하자.

$$\begin{aligned} \alpha(\theta^{(t-1)}, \theta^{(t)}) &= \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^{(t)}|x)q(\theta^{(t-1)})}{\pi(\theta^{(t-1)}|x)q(\theta^{(t)})} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\theta^{(t)})^2} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\theta^{(t)})^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta^{(t-1)})^2}}{e^{-\frac{1}{2}(x-\theta^{(t-1)})^2} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\theta^{(t-1)})^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta^{(t)})^2}} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu}(\theta^{(t)})^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{\nu}(\theta^{(t-1)})^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

※
극한 포인트
확인

라 한다면 $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ 의 분포는 변함 없이 $Multi(n, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1-\theta}{4}, \frac{1-\theta}{4}, \frac{\theta}{4})$ 가 된다. 여기서 x 를 완전 데이터로, y 를 실제 관측된 데이터라고 하고 EM 알고리즘을 적용해 보자.

4로

go to zero at 0). But the second limit is divergent (because x^{-3} goes to infinity as $x \rightarrow 0$, and $\cos(x^{-4})$ does not go to zero). So the limit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x^{-4}) - 4x^{-2} \cos(x^{-4})}{1}$ diverges. One might then conclude using L'Hôpital's rule that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x^{-4})}{x}$ also diverges; however we can clearly rewrite this limit as $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x^{-4})$, which goes to zero when $x \rightarrow 0$ by the squeeze test again. This does not show that L'Hôpital's rule is untrustworthy (indeed, it is quite rigorous; see Section 10.5), but it still requires some care when applied.

큰 수식 조판 I

- 조판 도구가 지원하지 않는 경우 (George Osborne *Calculus*, 1907). 활판 인쇄. $\frac{1}{2}$ 와 같은 분수는 작은 활자가 있으나 일반 분수식은 활자가 없는 관계로 큰 수식 조판을 하였다.

The limit of the sum of the series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, as the number of terms is indefinitely increased, is 2.

The limit of the fraction $\frac{a^3 - a^2}{x - a}$, as x approaches a , is $3a^2$.

- 조판 툴의 add-on이 작은 수학식의 조판에 불편한 경우. 텍스트 영역에서 분수식을 전혀 쓰지 않은 케이스.

Then $\Delta z/\Delta x$ approaches $f'(y)$ times $g'(x)$, which is the chain rule $(dz/dy)(dy/dx)$. In the table below, the derivative of $(\sin x)^3$ is $3(\sin x)^2 \cos x$. That extra factor $\cos x$ is easy to forget. It is even easier to forget the -1 in the last example.

• HWP의 도저한 영향.

휘어진 모니터는 시각적으로 편안함을 준다고 한다. 또 안경 대신 눈의 각막에 직접 붙여 사용하는 콘택트렌즈가 편안하게 느껴지도록 하려면 렌즈의 휘어진 정도를 고려해야 한다.

이계도함수를 이용하면 곡선이 어느 정도 휘었는지를 알 수 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 휘어진 정도를 계산할 때 $\frac{|f''(a)|}{[1+(f'(a))^2]^{3/2}}$ 의 값을 이용하기 때문이다. 예를 들어 함수 $f(x)=x^2$ 에 대하여 $\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$ 의 값은 $x=0$ 일 때 가장 크므로 곡선 $y=x^2$ 은 점 $(0,0)$ 에서 가장 많이 휘었음을 알 수 있다. 기

큰 수식 조판 III: 교육용 문서

- 일본의 경우 (초중고 교과서)

分数はインライン数式でも大きくなります。
一方, 指数などでは横棒が短くなります。極
限の添字も常に真下になります。

- 우리나라 고등학교 교과서

휘어진 모니터는 시각적으로 편안함을 준다고 한다. 또 안경 대신 눈의 각막에 직접 붙여 사용
하는 콘택트렌즈가 편안하게 느껴지도록 하려면 렌즈의 휘어진 정도를 고려해야 한다.

이계도함수를 이용하면 곡선이 어느 정도 휘었는지를 알 수 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의
점 $(a, f(a))$ 에서의 휘어진 정도를 계산할 때 $\frac{|f''(a)|}{[1+\{f'(a)\}^2]^{\frac{3}{2}}}$ 의 값을 이용하기 때문이다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2$ 에 대하여 $\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 의 값은 $x=0$ 일 때 가장 크므로 곡선 $y=x^2$
은 점 $(0, 0)$ 에서 가장 많이 휘었음을 알 수 있다.

- **화이트스페이스:** 구미 문헌의 조판 원칙 중에서 가장 중요하게 다루어지는 요소 중 하나.
- **행송의 일관성:** 큰 수식으로 행송이 흐트러지면 화이트스페이스가 발생한다. 이것은 미관을 해치고 시선 이동을 착란시켜 독서를 방해한다.
- **언어적 측면:** 인라인 수식은 문장의 일부로서, 문법이나 문장부호 사용에 있어서도 문장 중에 자연스럽게 놓여야 한다. ‘큰 수식’은 문장의 일부로부터 분리되어 별도의 요소처럼 보이게 된다.

- 한국어 문서는 행간이 충분히 넓어서 화이트스페이스의 영향을 적게 받는다.
- 수학적식이 문장의 일부로서 ‘읽어지는’ 것은 영어일 때나 가능하다. 한국어 내부의 수학적식이 한국어의 일부로 받아들여지기 어려운 측면이 있다.

- 교육용 문서는 그 교육적 목적을 위하여, 조판적 기준을 어느 정도 희생하더라도 수학식의 ‘모양’을 일관성있게 시각화할 필요가 있다.
- 중·고등학교와 대학 저학년(대체로 《미적분학》) 단계까지는 인라인 수식을 ‘큰 수식’으로 조판하는 것이 허용된다.
- 학문적 커뮤니케이션을 위한 문서는 학문 공동체의 언어와 관습을 따라야 할 것이고, 수학식의 경우에는 \TeX 표준 수식이 이에 해당한다.
- 대학 고학년 교재부터는 학문 공동체의 언어에 더 가까운 형태, 즉 보편적인 표준 \TeX 수식으로 조판하는 것이 옳을 것이다.

패키지 `koredumath`의 작성

- 중·고등학교 수학에서만 사용되는 부호를 보충한다.
- 원칙적으로 인라인 수식에서 《큰 부호》를 디폴트로 사용할 수 있도록 한다. 이로 인한 행송의 흐트러짐을 보정할 수 있는 도구를 (필요하다면) 제공한다.
- 기타 교육용 문서에 필요한 부호와 명령을 추가한다.
- 기존에 입력된 소스의 수정을 최소한으로 하는 데 초점을 둔다.
- 실제 출판 현장에서 중·고교 및 대학 저학년용 수학 교과서를 조판할 때 활용할 수 있도록 한다.

`$ texdoc jpnedumathsymbols`

日下部幽考(Yukoh Kusakabe)의 `jpnedumathsymbols` 패키지는 일본의 교육용 수학식을 일본 출판 규정과 관행에 맞게 \TeX 으로 조판할 수 있도록 도와주는 것이다. 우리의 교육용 수학식과 부호의 제법 많은 부분이 일본으로부터 왔고, 조판 관행도 마찬가지로이므로 이 패키지가 제공하는 기능을 적극적으로 활용하는 것은 유용하다.

따라서 `koredumath`가 `jpnedumathsymbols`를 바탕으로 한다. 그 가운데 우리 실정에 맞지 않은 것은 수정하고 이 패키지에 없는 것은 추가하여 작성하였다. (이하 이 패키지를 JEMS로 약칭한다).



- JEMS는 닮음 기호 `\similar`를 [U+223D]를 찍는 방식으로 정의한다.
- 그러나 라틴 문자에 대하여 별도의 라틴 글꼴을 쓰고 본문 글꼴도 사용폭이 넓은 우리 ko.T_EX의 방식으로는 이렇게 하면 의도한 대로 부호가 나타나지 않는다.
- 그래서 특정 폰트(default는 Noto Serif KR)를 이 부호 식자에 강제하도록 하였다. 폰트는 옵션으로 선택할 수 있다.
- 나아가 pdf_ℒT_EX을 위하여, 이 폰트로부터 글자 그림을 추출하여 이것으로 식자하게 하였다.

수정 예시: \dint 수정

$$\int f(x) dx \quad \int_a^b f(x) dx$$

- JEMS의 \dint 정의는 `\displaystyle\int` 로 되어 있다.
- 그러나 이렇게 하면 (JEMS 매뉴얼에도 이미 언급되고 있듯이) \dint를 사용한 시점 이후 해당 수식 덩어리 안에서는 무조건 `displaystyle`이 적용되는 문제가 생긴다.
- 이를 수정하여, `displaystyle`이 오직 \int 부호에만 영향을 주도록 고쳤다.

```
\NewDocumentCommand{\dint}{e[_^]}{%  
  \mathop{\displaystyle\int  
  \IfValueT{#1}{_{#1}}%  
  \IfValueT{#2}{^{#2}}%  
}}
```

명령 추가 예시: \dsum

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad \sum_{k=1}^n a_k$$

- 인라인 수식에서 \sum 의 상하첨자를 오른쪽에 두는 것이 일반적임에도 불구하고, 교육용 도서에서는 `\limits` 방식으로 상하에 둘 것을 요구하고 있다.
- 이를 위해서 인라인에서도 \sum 을 쓰게 되면 시그마 부호의 크기가 너무 커서 상당히 피로한 결과를 가져온다.
- `\dsum`은 디스플레이 수식에서는 \sum 이 찍히도록 하고 인라인 수식에서는 조금 작은 '시그마' Σ 를 식자하되 첨자는 `\limits` 방식을 유지하도록 한 것이다.
- 고등학교 수학에서 쓸 일이 거의 없겠지만 `\dprod`도 같은 방식으로 정의해두었다.
- 참고로, (어차피 prod인) ${}_n\Pi_r$ 과 $\prod_{i=0}^{\infty}$ 의 모양을 비교해볼 수 있다.

koredumath의 기능

- 중·고등학교 교재에서는 $\mathbf{}$ 도 $\mathbb{}$ 도 전혀 사용하지 않는다.
- 그러나 대학교 교과서나 일반적인 목적의 문서에서는 이들을 활용해야 할 것이다. 패키지 옵션 `[mathbb]`로 다음 부호를 $\mathbb{}$ 로 식자할 수 있다.

Example

\mathbb{N} (\mathbb{N}), \mathbb{Q} (\mathbb{Q}), \mathbb{N}_0 (\mathbb{N}_0), \mathbb{R} (\mathbb{R}), \mathbb{Z} (\mathbb{Z})

Example

option: `[mathbb]` \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{R} , \mathbb{Z}

- `[mathbb]` 옵션이 주어지면 확률과 통계의 기댓값 $E(X)$ (`\expectedvalue`)도 blackboard bold가 된다. (우리나라 교과서에서 기댓값은 단순히 E 를 쓴다는 점에 주의)

- 그러나 `math italic`과 `math roman`의 구별은 매우 엄격한 편인데, `math roman`이 쓰이는 경우는 다음과 같다.
 - 함수명(`sin`, `cos`, `ln`), 점과 좌표(`P(0, 2)`), 도형의 꼭짓점(`ABC`)
 - 확률 $P(a \leq X \leq b)$, 정규분포 `N`, 기댓값 $E(X)$, 분산 `V`
- 변수는 모두 `math italic`, 행렬과 집합의 명칭도 `math italic`이다.
- 예컨대 $\triangle ABC$ 에서는 `roman`이지만 $\sin A$ 의 `A`는 변량이므로 `italic`이 되어야 한다. $\sin \angle A$.
- 예외적으로 《여집합 기호》(중·고등학교 수학에만 나오는 부호)는 `math italic`으로 한다. A^c .
- `\AA`, `\BB`, ..., `\ZZ`까지 대문자를 두 번 겹쳐쓰면 `roman` 대문자로 식자한다. (JEMS)

Example

`A (\AA)`, `B (\BB)`, `C (\CC)`

	TeX 표준	교육용 기호
합동	$\cong (\backslash\text{cong})$	$\equiv (\backslash\text{equiv})$
닮음	$\sim (\backslash\text{sim})$	$\sphericalangle (\backslash\text{similar})$
평행	$\parallel (\backslash\text{parallel})$	$\parallel (\backslash\text{parallel})$

- 교육용 닮음 부호는 koredumath에서 전면적으로 다시 구성했다. Noto Serif KR 폰트의 것을 찍도록 한 것이 디폴트이나, [similarisignfig] 옵션을 주어서 폰트 없이도 식자되도록 하고 있다.
- TeX 표준 평행 부호를 써야 할 때가 있으면 `\originalparallel` 명령에 대응한다.
- 이 세 부호는 우리 교육용 수학 부호가 일본에서 온 것이 많다는 것을 보여주는 한 예이다.

- 인라인 수식에서도 `\frac` 명령으로 큰 분수를 식자한다. $\frac{1}{2}$.
- 지수나 첨자 위치에 올 때는 크기가 달라진다. $a^{\frac{1}{2}}$ $b_{\frac{2}{3}}$.
- 분자나 분모 위치에 다시 분수가 올 때. 크기는 큰 분수를 쓰지만 가로선의 길이를 조금 조절한다. $\frac{a_1 \frac{n+m}{x_1}}{b_{\frac{2}{3}}}$.
- `\oroginalfrac` 명령으로 원래의 분수 명령을 쓸 수 있다. 위의 경우 분모 안의 분수를 작게 할 필요가 있다면, $\frac{a_1 \frac{n+m}{x_1}}{b_{\frac{2}{3}}}$.

- 인라인 수식에서도 `\frac` 명령으로 큰 분수를 식자한다. $\frac{1}{2}$.
- 지수나 첨자 위치에 올 때는 크기가 달라진다. $a^{\frac{1}{2}}$ $b_{\frac{2}{3}}$.
- 분자나 분모 위치에 다시 분수가 올 때. 크기는 큰 분수를 쓰지만 가로선의 길이를 조금 조절한다. $a_1 \frac{n+m}{x_1}$ $b_{\frac{2}{3}}$.
- `\originalfrac` 명령으로 원래의 분수 명령을 쓸 수 있다. 위의 경우 분모 안의 분수를 작게 할 필요가 있다면, $a_1 \frac{n+m}{x_1}$ $b_{\frac{2}{3}}$.
- Why not `\dfraction`?

- 인라인 수식에서도 `\frac` 명령으로 큰 분수를 식자한다. $\frac{1}{2}$.
- 지수나 첨자 위치에 올 때는 크기가 달라진다. $a^{\frac{1}{2}}$ $b_{\frac{2}{3}}$.
- 분자나 분모 위치에 다시 분수가 올 때. 크기는 큰 분수를 쓰지만 가로선의 길이를 조금 조절한다. $a_1 \frac{n+m}{x_1}$, $b_{\frac{2}{3}}$.
- `\originalfrac` 명령으로 원래의 분수 명령을 쓸 수 있다. 위의 경우 분모 안의 분수를 작게 할 필요가 있다면, $a_1 \frac{n+m}{x_1}$, $b_{\frac{2}{3}}$.
- **Why not `\dfrac`?**
- `\frac`이 워낙 익숙하기 때문에 일관되게 `\dfrac`을 쓰는 것을 기대하기 어렵다.
- 모든 곳의 `\frac`을 `\dfrac`로 일괄 변경한 때는 위험한 결과를 가져올 수도...

합 기호, 적분 기호

- koredumath에서 수정하였다. 합기호는 인라인 수식에서 ‘시그마’ 부호의 크기는 디스플레이 수식보다 조금 줄어들지만 첨자가 상하로 붙는 `\dsum` 명령을 제공한다.

$$\sum_{i=1}^k a_k$$

$$\sum_{i=1}^k a_k$$

- `\sum` 명령은 원형 그대로이다. $\sum_{k=1}^n$.
- 인라인 수식에서도 큰 적분 기호를 쓰려면 `\dint`를 쓸 수 있다. $\int_a^b f(x) dx$.
- `\dint`가 JEMS에서는 `\displaystyle\int`와 같기 때문에 이 부호 이후 수식에도 영향을 미친다. 이를 koredumath에서 수정하였다.

`\dint_a^b f(x)\,dx`, `\sum_{k=1}^n`; `\jpn\dint_a^b f(x)\,dx`, `\sum_{k=1}^n`

$$\int_a^b f(x) dx, \sum_{k=1}^n; \int_a^b f(x) dx, \sum_{k=1}^n$$

나열 `\comma` 명령을 쉼표 대신 쓰면 나열 상황에서 쉼표 뒤에 간격을 붙여준다.

a, b, c, \dots versus a, b, c, \dots

dx,dy,dz $\int f(x) dx$ 와 같은 상황에서 dx 앞에 약간의 간격을 주는 `\dx`, `\dy`, `\dz` 명령이 정의되어 있다.
`\dr\ds\dt\du\dx\dy\dz\dttheta`.

평면좌표와 공간좌표 `\pair`, `\triplet`, `\quadruplet` 명령으로 좌표를 표현할 때 괄호의 크기와 쉼표 뒤의 간격을 제어한다.

$(2, 3)$, $(2, 3, \frac{1}{2})$.

eparen 1차원 좌표도 같은 방식으로 표현할 수 있도록 `\eparen`을 정의하였다. (K)

$(\frac{7}{12})$

절댓값 `\abs.` $\left| -\frac{2}{3} \right|$.

eparen 앞서 1차원 좌표로 소개한 명령이나, 괄호 대응으로 쓸 수 있다.

`\eparen{\frac{a+b}{c}}`. $\left(\frac{a+b}{c} \right)$

구간 열린 구간 또는 닫힌 구간을 표현할 때 `\intvl` 명령을 제공한다.

`\intvl({-3}{b})`. $(-3, b]$. 이 명령은 괄호 크기, 쉼표 다음의 공백, 그리고 브래킷 전후에 약간의 공백을 추가하는 역할을 한다.

braket 소위 대괄호, 중괄호, 소괄호를 표현한다.

`\braket2{\frac{a}{b}}`. $\left\{ \frac{a}{b} \right\}$. 1은 소괄호, 2는 중괄호, 3은 대괄호이다. 1을 쓰는 것은 `\eparen`을 쓰는 것과 거의 같다.

현행 교육용 수학의 대>중>소 괄호에 엄격하게 위계를 적용하는 것이 영 이상하지만 그렇게 써야 한다면 어쩔 도리 없을 것이다.

- cases 환경(조각적으로 정의되는 함수)과 simul 환경(연립방정식)을 JEMS에서 제공한다. 괄호의 크기를 조금 수정하였다.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

기타 부호

순열과 조합 ${}_nP_r, {}_nC_r, {}_n\Pi_r, {}_nH_r$. 각각 $\text{\permutation{n}{r}}$,
 $\text{\combination{n}{r}}$,
 $\text{\repeatedpermutation{n}{r}}$,
 $\text{\homogeneous{n}{r}}$.

호 \widehat{ABCD} $\text{\arc{\AA\BB\CC\DD}}$

overline류 $\bar{a} + \bar{b}$ $\text{\conj{a}+\conj{b}}$ 는 높이와 길이가 $\bar{x} - \bar{y}$
 $\text{\cml{x}-\cml{y}}$ 와 조금 다르다. 앞의 것은 켈레복소수
부호이고 뒤의 것은 complement 부호이다.

벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{f}$. $\text{\vec{a}\comma \vec{b}\comma \vec{f}}$.

수열 $\text{\seq. \{a_n\}}$.

역함수 $\text{\inverse{f}} f^{-1}$ 또는 $f\text{\invrs} f^{-1}$

합성함수 $f\text{\ccirc} g f \circ g$ vs. $f\text{\circ} g f \circ g$ (Kriess의 `intothemath.sty`
로부터 가져옴)

- physics 패키지가 제공하는 명령 \pdv는 편미분식을 조판하는 데 매우 유용하지만 이 패키지를 로드하여 발생하는 부작용이 좀 있다. 그래서 \pdv 명령을 완전히 새롭게 구현하였다.
- 한편 \pdv와 같은 방식으로 미분을 표현하기 위한 \ndv 명령도 제공한다.

`\pdv{y}{x}` `\pdv{x}` `\pdv[2]{y}{x}` `\pdv{f(x, y)}{x}{y}`
`\ndv{y}{x}` `\ndv{x}` `\ndv[2]{y}{x}` `\ndv{f(x, y)}{x}{y}`

$$\frac{\partial y}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dx} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \frac{d^2 f(x, y)}{dx dy}$$

항등행렬 $\mathtt{\matl{p}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

첨자 $\mathtt{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}$

3×3 행렬 $\mathtt{\thrmatrix{p}{a}}$

첨자의 위치 필요에 따라 첨자 위치를 조금 조절할 수 있도록 하였다.

	<code>\stdsupersub</code>	<code>\varsupersub</code>
<code>(\varsupersubstep)</code>	a^2, b^2, c^2	a^2, b^2, c^2
	a_2, b_2, c_2	a_2, b_2, c_2
<code>\varsupersubstep[3]</code>	a^2, b^2, c^2	a^2, b^2, c^2
	a_2, b_2, c_2	a_2, b_2, c_2

점선과 수식번호 원문자 중고등학교 참고서류에서 자주 볼 수 있는 수식 번호 포맷.

$S_{k-1} + S_{k+1} \geq S_k \dots\dots\dots ①$
이 성립할때 2 이상의 자연수 k 에 대하여 ①이 성립함을 가정하면,
$S_k + S_{k+2} \geq S_{k+1} \dots\dots\dots ②$
②도 성립하므로, 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 k 에 대하여 성립한다.

이 기능은 현재 equation 환경에 대해서만 작동하며 두 번 컴파일을 필요로 한다. 그리고 kocircnum 패키지를 요구하는 등 제한이 있다.

마치는 말

감사합니다.