LyX oblivoir 문서 샘플

Nova de Hi

2024년 5월 28일

요 약

이 문서는 LyX로 oblivoir 문서를 작성하는 예를 보이기 위하여 작성하였다. 텍스트는 로저 펜로즈 지음, 박승수 옮김, 『황제의 새 마음: 컴퓨터, 마음, 물리 법칙에 관하여 (상)』(1996, 이화여자대학교 출판부) pp. 151ff. 의 일부를 차용하였다.

폰트는 TeX Gyre Pagella와 Noto Serif CJK KR, Noto Sans CJK KR을 적용하였다.

차 례

1 복소수

수학적인 능력과 우아함에서 실수 체계가 완전히 독점권을 갖는 것은 아니라는 사실이 밝혀졌다. 예를 들면, 제곱근은 음수가 아닌 양수로부터만 취할 수 있다는 것은 약간 매끄럽지 못하다. 수학적인 관점에서—잠시 물리적 체계와의 직접적인 관계에 대한 문제는 접어 두기로 하고—양수뿐만 아니라 음수의 제곱근을 구할 수 있다면 매우 편리할 것이라는 사실이 판명되었다. -1에 대한 제곱근을 단순히 가정하거나 혹은 '발명' 해보자. 그리고 이것을 기호 'i'로 표기하기로 하자. 그러므로 다음 식이 성립한다.

$$i^2 = -1$$

실수를 자기 자신에 곱한 결과는 항상 양수(또는 숫자가 0이면 0)이므로 i의 값은 실수가 될 수 없다. 이러한 이유로 제곱이 음수인 수에 대해서는 관례적으로 허수(虛數, imaginary number: 가상의 수)라는 용어를 사용한다. 그러나 이러한 허수가 우리에게

친숙한 실수에 비해서 현실성이 떨어지지는 않는다는 사실을 강조하고 싶다. 앞에서 강조한 바와 같이, 그러한 '실수'와 **물리적** 실체 사이의 관계는 처음 생각한 것처럼 직접적이거나 강제성이 있는 것은 아니다. 왜냐하면 실수에서는 무한한 정밀성의 수학적 이상체를 다루고 있는데, 이에 대해서는 자연으로부터 **선험적**(先驗的, *a priori*)인 근거가 그다지 명확하지 않다.

일단 -1의 제곱근을 갖게 되면 **모든** 실수에 대한 제곱근을 구하는 것은 그다지 어렵지 않다. a가 양의 실수라면,

$$i \times \sqrt{a}$$

는 음의 실수 $-a$의 제곱근이다. (또 하나의 제곱근 $-i \times \sqrt{a}$도 있다.) i 자체는 어떠한가? 이것도 제곱근을 갖는가? 물론 그렇다. 왜냐하면,

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

(그리고 이 크기의 음수)의 제곱이 i가 되는 것을 쉽게 확인해볼 수 있을 것이다. 이 식 자체도 제곱근을 갖는가? 다시 한 번 그 답은 '예'이다.

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

과 그 음수의 제곱은 실제로 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$이다.

그러한 수량을 만들어 내기 위하여 실수와 허수를 더할 뿐 아니라 그 수에 임의의 실수를 곱하는 것도 허용한 사실에 주목하기 바란다(0이 아닌 실수로 나누기도 하였는데 이는 그것의 역수를 곱하는 것과 같다). 그 결과로 얻어지는 값을 **복소수**라고 부른다. 복소수는,

$$a + ib$$

형태의 수인데 이 때 a와 b는 실수로서 각각을 그 복소수의 **실수부**(real part)와 **허수부**(imaginary part)라고 부른다. 두 개의 복소수를 더하고 곱하는 규칙은 일반적인 대수적 규칙을 따르는데, 다만 $i^2 = -1$의 규칙이 추가되었을 뿐이다.

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$
$$(a+ib) \times (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

그런데 놀라운 일이 일어났다! 이 수의 체계에 대한 동기는 제곱근을 항상 구할 수 있도록 하고자 하는 것이었다. 이 목적은 아직 명확하지는 않지만 이미 이루어졌다. 그러나 그뿐만 아니라 훨씬 더 많은 것을 할 수 있게 되었다. 세제곱근, 다섯제곱근, 99제곱근, π 제곱근, $(1+i)$제곱근 등 모두를 무사히 구할 수 있게 된 것이다(18세기의 위대한 수학자 오일러가 보여주었던 것처럼). 복소수의 마법에 대한 또 한 가지 예로서 학교에서 배웠던

삼각함수의 다소 복잡해보이는 공식을 살펴보자. 두 각의 합에 대한 사인 값과 코사인 값은

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

인데, 이는 다음과 같은 훨씬 간단한 (그리고 외우기 쉬운!) 복소수 방정식의 허수부와 실수부에 각각 해당한다.[1]

$$e^{iA+iB} = e^{iA}e^{iB}$$

여기에서 우리는 '오일러의 공식'만 알면 된다(오일러 이전 18세기 초기 영국의 수학자 코우트스(Roger Cotes)도 분명 구한 바 있다).

$$e^{iA} = \cos A + i\sin A$$

이것을 위의 공식에 대입하면,

$$\begin{aligned}\cos(A+B) + i\sin(A+B) &= (\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)\\ &= (\cos A\cos B - \sin A\sin B) + i(\sin A\cos B + \cos A\sin B)\end{aligned}$$

이고, 오른쪽 항을 곱한 결과로서 우리가 원하는 삼각함수 관계식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\cos(A+B) = (\cos A\cos B - \sin A\sin B)$$
$$\sin(A+B) = (\sin A\cos B + \cos A\sin B)$$

이다.

[1] $e = 2.7182818285\ldots$(자연로그의 기수[base]로서 수학에서 π에 필적할 정도의 중요도를 갖는 무리수)의 값을 갖는 e는 다음과 같이 정의된다.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{(1\times 2)} + \frac{1}{(1\times 2\times 3)} + \cdots$$

그리고 e의 z승은 다음과 같다는 것이 밝혀졌다.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z}{(1\times 2)} + \frac{z}{(1\times 2\times 3)} + \cdots$$

찾아보기