1

코바야시 거리

1.1 포앙카레 거리

$\mathbb{C}^n$ 안의 유계영역 D 위에 주어진 기하학적인 구조로서 복소해석학에 도움을 줄 수 있으려면, 복소 해석적으로 같은 영역들에서는 그 기하학적 구조도 같다고 할 수 있어야 한다. 기하학적으로 가장 기본적인 구조가 거리구조라면 이러한 거리구조는 다음과 같은 성질을 필수적으로 갖추어야 할 것이다. 즉, 이론의 대상이 되는 각각의 영역 D 위에 거리구조 ρ_D 가 정의되어야 하며, D_1 과 D_2 가 $\mathbb{C}^n$ 의 임의의 영역이고 이 두 영역 사이에 해석동형사상(biholomophic map)

$$f : D_1 \longrightarrow D_2$$

가 있으면 이 영역들 위에 정의된 거리함수 ρ_1 과 ρ_2 에 대하여 앞의 해석동형사상은 등거리사상(isometry)이라야 한다.(즉, $\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y))$ 이다.)

이런 거리의 시초가 되는 예로서 단위원판 위에 정의된 포앙카레의 거리구조가 있다. 우리가 연구하려는 목적이 원판 위에서의 복소함수론이라면 원의 크기의 차이는 해석학에 별다른 영향을 주지 않으므로 단위 원판만을 생각하여도 된다. 이 때, 단위 원판 Δ 의 중심을 원점에 놓고, 원판 위의 두 점 P, Q 사이의 거리를 다음과 같이 정의한다.

먼저 Δ 안에서 정의되고 두 점 P, Q 를 잇는 조각매끄러운(piecewise smooth) 곡선들에 대하여 길이를 정의하자.

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \Delta$$

가 이러한 곡선이라면, γ 의 길이를

$$\text{Length}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad F(\gamma(t)) = \frac{1}{1 - |\gamma(t)|^2}$$

로 정의하고, 이러한 모든 γ 에 대하여 Length(γ)의 하한(infimum)을 P 와 Q 사이의 거리 $\rho(P, Q)$ 라고 정의한다. 이를 단위원판 위의 **포앙카레 거리**라고 한다. 이 거리는 리만계량을 써서 다음과 같이 정의할 수 있다. 단위 원판 위에 각 점

$z = x + \sqrt{-1}y$ 에서의 계량을

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{1}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2+dy^2)$$

라고 주면 이 리만 계량은 포앙카레 거리를 정의한다고 볼 수 있다. 이 때 포앙카레 거리는 구체적으로 다음과 같이 주어진다. 증명은 단순한 계산이다.

도움정리 1.1 *Δ 위에서 0 에서 $r(<1)$ 까지의 거리는 다음과 같이 주어진다:*

$$\rho(0,r) = \int_0^r \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r} \tag{1.1}$$

이 때 다음 정리가 성립한다.

정리 1.2 (슈바르츠 도움정리 ; Schwarz-Pick Lemma) *단위원판 Δ 에서 정의된 자기자신으로의 정칙사상은 포앙카레 거리를 증가시키지 않는다.*

[증명] 이 정리의 증명은 다음 사실만 보이면 충분하다.

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqq \frac{1}{1-|z|^2}$$

Δ 안의 한점 a를 고정하고

$$g(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \qquad h(z) = \frac{z-f(a)}{1-\overline{f(a)}z}$$

라고 정의하면 g와 h는 각각 0을 a로 보내고 $f(a)$를 0으로 보내는 단위 원판 위의 해석동형사상이다. 이 때 $F = h \circ f \circ g$라고 정의하면 F는 Δ에서 Δ로의 해석사상이며 $F(0) = 0$이다. 여기서 $F'(0)$를 계산하여 보면

$$F'(0) = h'(f(a))f'(a)g'(0) = \frac{1-|a|^2}{1-|f(a)|^2}\,f'(a)$$

와 같다. 복소함수론에서 슈바르츠의 도움정리로 부터 $|F'(0)| \leqq 1$이므로

$$\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leqq \frac{1}{1-|a|^2}$$

이다. 또 등호는 F와 (f)가 해석동형사상일 때만 성립한다. □

따름정리 1.3 *Δ의 동형사상은 포앙카레 거리에 대한 등거리사상이다.*

복소평면의 좌표를 $z = x + \sqrt{-1}y$라고 나타내며 이 좌표함수와 그 켤레함수 $\bar{z}$의 미분을

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy, \qquad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$$

라고 정의한다. 이는 실수함수의 미분 d를 복소선형이 되도록 확장한 것이다. 복소평면에서의 방향벡터는 이 미분들의 쌍대바탕벡터로 정의한

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

들의 일차결합으로 나타낼 수 있다. 이러한 접벡터들의 공간에 정의되는 이차텐서 가운데 기본이 되는 것을

$$dzd\bar{z} = \frac{1}{2}(dz \otimes d\bar{z}) = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

이라고 나타내기로 한다.

U가 $\mathbb{C}$의 열린 집합일 때 이 집합 위에 정의된 텐서

$$g = 2a(z)dzd\bar{z}$$

를 **에르미트 계량**(Hermitian metric)이라 부른다. 여기서 $a(z) > 0$는 U 위에서 $\mathscr{C}^\infty$ 함수이다. 이제 에르미트 계량보다 조금 일반화된 에르미트 준계량을 정의하자. U 위에 주어진 2차대칭텐서 $h = 2a(z)dzd\bar{z}$에서 $a(z)$가 다음 세 조건을 만족하면 h를 U 위의 **에르미트 준계량**(Hermitian pseudometric)이라 한다:

(1) $a(z)$는 연속인 실함수이고, $a(z) \geqq 0$이다.

(2) $\mathrm{Zero}(h) = \{z \in U \mid a(z) = 0\}$는 U 안에서 이산(discrete)집합이다.

(3) $a(z)$는 $U - \mathrm{Zero}(h)$ 위에서 $\mathscr{C}^\infty$ 함수이다.

여기서 $\mathrm{Zero}(h) = \varnothing$이면 h는 물론 에르미트계량이다. 따라서 에르미트계량은 에르미트 준계량의 특별한 경우이다. 예를 들어 $f(z)$가 U 위에서 항등적으로 0이 되지는 않는 해석함수일 때, $a(z) = |f(z)|$라 잡으면 위의 세 조건을 만족하므로 $h = |f(z)|dzd\bar{z}$는 U 위의 에르미트 준계량이 된다. 에르미트 준계량 $h = a(z)dzd\bar{z}$의 **가우스(Gauss)곡률** $K_h : U \to [-\infty, \infty)$를 다음과 같이 정의한다. $z \in \mathrm{Zero}(h)$이면 $K_h(z) = -\infty$라 하고, $z \in U - \mathrm{Zero}(h)$이면

$$K_h(z) = -\frac{1}{a(z)}\frac{\partial^2 \log a(z)}{\partial z \partial \bar{z}}$$

라 정의한다. $w = w(z)$ 가 $\mathbb{C}$ 의 열린집합에서의 해석적 좌표변환이면

$$h = a(z)dzd\bar{z} = b(w)dwd\bar{w}$$

라고 나타낼 수 있다. 이 때 $a(z) = b(w(z))|dw/dz|^2$ 이다. 이를 미분하여 보면

$$-\frac{1}{a(z)}\frac{\partial^2 \log a(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{1}{b(w)}\frac{\partial^2 \log b(w)}{\partial w \partial \overline{w}}$$

을 얻는다. 즉 곡률은 해석적 좌표에 의존하지 않는 불변개념이다.

미분계량으로부터 거리함수를 정의하는 것과 마찬가지 방법으로 U 위의 에르미트계량 또는 준계량 h 에 대하여도 U 위의 거리를 $(z, w \in U)$ 에 대하여 $d_h(z, w)$ 라고 정의할 수 있다.

예를 들면 실수 $r > 0$ 에 대하여 앞에서 정의한 $\Delta(r)$ 위의 포앙카레계량

$$g = 4r^2 dzd\bar{z}/(r^2 - |z|^2)^2$$

은 원판 $\Delta(r)$ 위에서 에르미트 계량이 된다. 이 계량이 주는 거리함수가

$$d_g(z, w) = \log\frac{r + |\alpha|}{r - |\alpha|}, \quad \alpha = \frac{r^2(w - z)}{r^2 - \bar{z}w}$$

임은 앞에서 단위원반의 거리함수 계산으로부터 바로 알 수 있다. 이 계량의 가우스곡률 $K_r(z)$ 도 간단한 계산에 의해

$$K_r(z) = -1, \qquad z \in \Delta(r)$$

임을 알 수 있다.

찾아보기